6ο online μάθημα / 9/4/2020.

Δ.Ε. για το διωνυμικό p

- Υπενθύμιση: Διωνυμικό τυχαίο πείραμα → τυχαίο πείραμα με 2 δυνατά αποτελέσματα: Επιτυχία, Αποτυχία
- Διωνυμική κατανομή

επαναλήψεις → ανεξάρτητες

πιθανότητα επιτυχίας → αμετάβλητη ίση με p.

Ας μιλήσουμε για το εξής παράδειγμα.

Ένας άνθρωπος είτε έχει μυωπία είτε όχι. Έστω p η άγνωστη πιθανότητα κάποιος να έχει μυωπία. Υπό την υπόθεση ότι η πιθανότητα αυτή είναι σταθερή για κάθε άτομο και ανεξάρτητη η εμφάνιση μυωπίας μεταξύ των ατόμων πως μπορώ να βρω έναν εκτιμητή της; Διαλέγω τυχαία π.χ. $n=10$ άτομα και μετρώ πόσοι έχουν μυωπία. Αν π.χ. έχουν 3 τότε ένας εκτιμητής $\hat{p} = \frac{3}{10}$

Δηλαδή γενικά $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{\text{πλήθος επιτυχιών σε } n \text{ δοκιμές}}{\text{το πλήθος των δοκιμών}}$

Τότε θυμηθούμε το Κ.Ο.Θ. θα έχουμε:

$$\hat{p} \overset{\text{προσεγ.}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

ή

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Ποιο το πρόβλημα εδώ;

Πως θα προκύψει το Δ.Ε.;

$$\left[\hat{p} - Z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + Z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

• Δ.Ε. για το σ^2 κανονικού

Τι ξέρω για το σ^2;

$$ES^2 = \sigma^2$$

Τι άλλο;

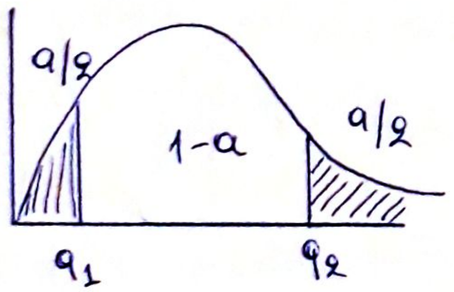
$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$

Άρα

$$P\left[q_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq q_2\right] = 1-a$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{q_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right]$$

Τα q_1, q_2 τώρα δεν μπορούν να βρεθούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μήκος (γιατί; σ^2 εξάμηνο)



ΛΥΣΗ ???

Διαλέγω q_1, q_2 έτσι ώστε να έχω ίσες ουρές

$$q_2 = X^2_{a/2,\, n-1}$$

$$q_1 = X^2_{1-a/2,\, n-1}$$

Δύο ποσοστά χωρίς ζεύγη

- Η έννοια χωρίς ζεύγη θα εξηγηθεί.
- Έστω p_1 το ποσοστό μυωπίας ανδρών
  και p_2 το ποσοστό μυωπίας γυναικών

Τότε υπό τις υποθέσεις όσων έχουν αναφερθεί

$$\hat{p}_1 = \frac{x}{n} = \frac{\text{πλήθος ανδρών μυωπίας στους } n \text{ που διαλέξαμε}}{n}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{y}{m} = \frac{\text{πλήθος γυναικών μυωπίας στις } m \text{ που διαλέξαμε}}{m}$$

Είναι τότε το Δ.Ε.

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$$

$$\hat{p} = \bar{X} \overset{\pi\rho o\sigma}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\pi\rho o\sigma.}{\sim} N(0,1)$$

Θεωρία Π.Ο. και Στατ

$$Q = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \overset{\pi\rho o\sigma.}{\sim} N(0,1)$$

$$P\left(q_1 \le \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \le q_2\right) = 1-a$$

$$P\left(q_1 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le \hat{p} - p \le q_2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1-a$$

$$P\left(\hat{p} - q_2 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} - q_1 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1-a$$

$$e = (q_2 - q_1)\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$q_2 = Z_{a/2}$

$q_1 = -Z_{a/2}$

Δ.Ε. p:

$$\left[\hat{p} - Z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \; \hat{p} + Z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$100(1-a)\%$

Δ.Ε. για το σ^2 ΚΑΝΙΚΟΥ

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$

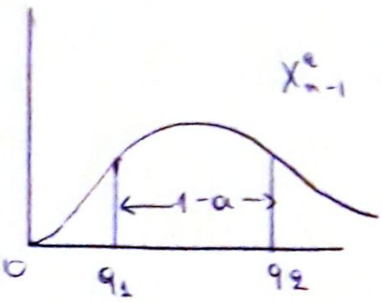
$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$E(S^2) = \sigma^2$

$\rightarrow Q \sim \chi^2_{n-1}$

$$P\left(q_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le q_2\right) = 1-a$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right) = 1-a$$



$$l = (n-1)S^2\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

θα ήθελα q_1, q_2 τ.ω. το μήκος ελάχιστο

$$P\left(\chi^2_{n-1} \le q_1\right) = a/2$$

$$P\left(\chi^2_{n-1} \ge q_2\right) = a/2$$

$q_2 = \chi^2_{n-1,\, a/2}$

$q_1 = \chi^2_{n-1,\, 1-a/2}$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2},\ \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right)$$

Δ.Ε. για τη διαφορά $p_1 - p_2$ χωρίς ζεύγη (ανεξ. δείγματα)

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $B(1, p_1)$

$Y_1, \dots, Y_m$ τ.δ. από $B(1, p_2)$

$$\hat{p}_1 = \frac{\sum X_i}{n} = \bar{X} \qquad \hat{p}_2 = \frac{\sum Y_i}{m} = \bar{Y}$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right) \\ \bar{Y} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right) \end{array}\right\} \text{ανεξ. δείγματα}$$